

УДК 517.968.78, 519.642.2
doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-4

Численное исследование интенсивности электромагнитной волны в частично экранированном неоднородном полушаре

О. С. Скворцов¹, А. А. Цупак²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ghj.ghh.13@mail.ru, ²altsupak@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – разработка, программная реализация и апробация проекционного метода для сравнения способов фокусировки электромагнитного поля в диэлектрическом частично экранированном полушаре. *Материалы и методы.* Метод Галеркина реализован для векторного интегро-дифференциального уравнения задачи дифракции; определены базисные вектор-функции на объемном теле и параметризованном неплоском экране; реализован параллельный алгоритм решения задачи с использованием библиотеки MSMPI. *Результаты.* Проведено сравнение различных вариантов экранирования полушара с целью фокусировки электромагнитного поля внутри тела. *Выводы.* По результатам вычислительных экспериментов выбран наиболее эффективный метод фокусировки волны в рассеивателе заданной формы.

Ключевые слова: дифракция электромагнитной волны, неоднородное объемное тело, неплоский экран, система интегро-дифференциальных уравнений, метод Галеркина, фокусировка поля, СВЧ-томография

Финансирование: работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания на проведение НИР, регистрационный номер 124020200015-7.

Для цитирования: Скворцов О. С., Цупак А. А. Численное исследование интенсивности электромагнитной волны в частично экранированном неоднородном полушаре // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 3. С. 43–56. doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-4

Numerical study of electromagnetic field intensity in a partially shielded inhomogeneous half ball

O.S. Skvortsov¹, A.A. Tsupak²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹ghj.ghh.13@mail.ru, ²altsupak@yandex.ru

Abstract. *Background.* The purpose of the work is to develop, implement and test a projection method for comparing methods of focusing electromagnetic fields passing through a dielectric partially shielded half ball. *Material and methods.* The Galerkin method is implemented for the vector integro-differential equation of the diffraction problem; basic vector functions in a three-dimensional solid and a parameterized non-planar screen are determined; a parallel algorithm for solving the problem using the MSMPI library is implemented. *Results.* Various options for shielding the half ball in order to focus the electric field inside the body were compared. *Conclusions:* the most effective method of focusing the wave in the proposed arrangement of the screen-body system has been selected.

Keywords: electromagnetic wave diffraction, inhomogeneous solid, curvilinear screen, system of integro-differential equations, Galerkin method, field focusing, microwave tomography

Financing: the research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Reg. No. 124020200015-7).

For citation: Skvortsov O.S., Tsupak A.A. Numerical study of electromagnetic field intensity in a partially shielded inhomogeneous half ball. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(3):43–56. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-4

Введение

В работе описан численный метод решения векторной задачи рассеяния монохроматической электромагнитной волны препятствием, состоящим из объемного неоднородного тела, частично экранированного неплоским идеально проводящим экраном.

Целью разработки численного метода для решения такой задачи является выбор оптимального способа экранирования диэлектрического полушара для наилучшей фокусировки электромагнитного поля в области неоднородности: проблема фокусировки поля возникает, например, в медицине, в области СВЧ-томографии [1]. Для диагностики и лечения рака применяются методы, основанные на облучении высокочастотным электрическим полем высокой интенсивности [2].

Теоретическому исследованию векторной задачи дифракции на частично экранированном диэлектрике посвящены работы [3–5], а ее численному решению – статьи [6, 7]. В работах [8, 9] описаны векторные базисные функции на гладких неплоских параметрически заданных экранах. Описанный в [7–9] подход позволяет вводить векторные базисные функции непосредственно на гладкой (например, сферической) поверхности, не прибегая к замене последней кусочно-плоской поверхностью.

В данной статье метод Галеркина используется для численного решения задачи дифракции монохроматической волны на диэлектрически неоднородном полушаре, который может быть частично экранирован идеально проводящей полусферой. Приведено описание базисных функций, формулы для определения матричных элементов в методе Галеркина. Проведены вычислительные эксперименты, иллюстрирующие влияние идеально проводящего экрана и диэлектрического слоя на фокусировку электрического поля в области неоднородности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу рассеяния монохроматической электромагнитной волны расположенным в $\mathbb{R}^3$ телом Q (рис. 1). На рис. 1 $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ – электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль оси x ; ϵ_e, μ_e – диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства соответственно; $\epsilon(x) = \epsilon_r(x)\epsilon_e$ – диэлектрическая проницаемость тела Q .

В качестве первого способа фокусировки рассмотрим частичное экранирование идеально проводящей полусферой (рис. 2,а). Так как в общем слу-

чае рассеиватель Q может быть диэлектрически неоднородным, то следующий способ состоит в нанесении слоя диэлектрика (шарового слоя заданной толщины) (рис. 2,б). В третьем подходе сочетаются два предыдущих способа (рис. 2,в).

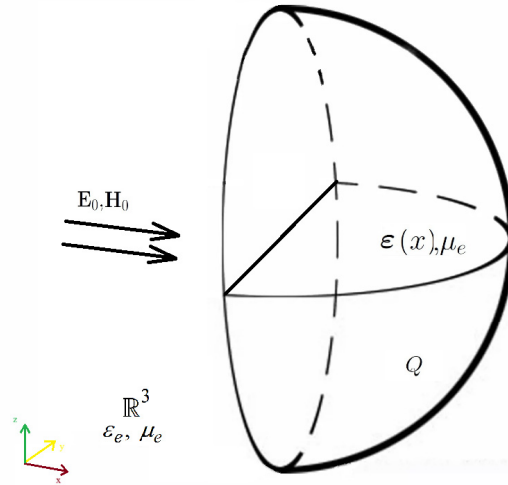


Рис. 1. Расположение тела Q в $\mathbb{R}^3$

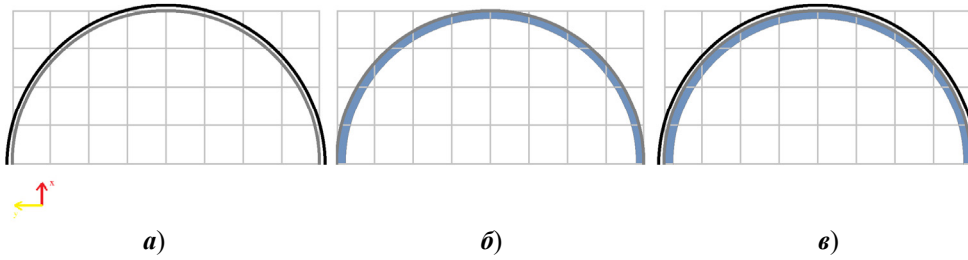


Рис. 2. Способы фокусировки с помощью экранирования (а), нанесения диэлектрического слоя (б), с помощью экрана и неоднородности (в)

На рис. 2 идеально проводящий экран изображен чёрной кривой, диэлектрический слой выделен синим цветом. Электромагнитное поле распространяется вдоль оси x , основание полушара лежит в плоскости Oyz .

2. Интегро-дифференциальные уравнения задачи дифракции

Задача дифракции монохроматической электромагнитной волны на системе рассеивателей, состоящей из объемного тела (полушара) Q и бесконечно тонкого экрана (полусферы) Ω (в способах (а) и (в) фокусировки поля), расположенных в $\mathbb{R}^3$, сводится [3, 4] к системе векторных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ):

$$\xi \mathbf{J} - \left(k_0^2 + \text{grad div} \right) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy -$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(k_0^2 + \text{grad div}\right) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \\
 & \left(-\left(k_0^2 + \text{grad div}\right) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy - \right. \\
 & \left. -\left(k_0^2 + \text{grad div}\right) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \right)_{\tau} = \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где $\mathbf{E}_{0,\tau}$ – касательная компонента падающего электрического поля;

$$\mathbf{J}(x) = \left[\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_e} - 1 \right] \mathbf{E}(x), \quad G(x, y) = \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|}; \quad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_e\mu_e} - \text{волновое число.}$$

Идеально проводящий экран Ω параметрически задан с помощью вектор-функции

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t_1, t_2), x_2(t_1, t_2), x_3(t_1, t_2))^T, \quad t \in D, \quad (2)$$

$D \subset \mathbb{R}^2$ – область параметров; $x_k \in C^\infty(\bar{D})$, $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$ – ранг матрицы Якоби, равный 2.

В случае (б) (в отсутствие идеально проводящей поверхности) задача дифракции сводится [10] к ИДУ

$$\xi \mathbf{J} - \left(k_0^2 + \text{grad div}\right) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \quad (3)$$

В работах [3, 4] подробно описаны ограничения, накладываемые на диэлектрические свойства среды и рассеивателей, которые обеспечивают существование и единственность решения системы (1), а также сходимость для нее метода Галеркина в подходящих пространствах. Формулировка метода Галеркина и достаточные условия его сходимости описаны, например, в монографии [11].

3. Дискретизация задачи

Построим расчетную сетку на системе тел и экранов для решения системы ИДУ (1) методом Галеркина.

Рассмотрим случай (рис. 2,б), когда систему рассеивателей образуют и неплоский экран Ω – поверхность полусферы, и объемное неоднородное тело Q , являющееся полусфером.

Введем в области параметров $D = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$ двухиндексную нумерацию $i = (i_1, i_2)$ конечных элементов для параметрически заданного экрана Ω . Конечные элементы суть прямоугольники:

$$D_{i_1, i_2}^1 = [t_{i_1}; t_{i_1+2}] \times [t_{i_2}; t_{i_2+1}] \quad (i_1 = \overline{0, n-2}, i_2 = \overline{0, n-1}),$$

$$D_{i_1, i_2}^2 = [t_{i_1}; t_{i_1+1}] \times [t_{i_2}; t_{i_2+2}] \quad (i_1 = \overline{0, n-1}, i_2 = \overline{0, n-2}),$$

где

$$t_{i_k} = c_k + i_k h_k, \quad h_k = \frac{d_k - c_k}{n}, \quad k = 1, 2.$$

Рассмотрим скалярные функции

$$v_{i_1, i_2}^1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t_1 - t_{1, i_1+1}|}{h_1}, & t \in D_{i_1, i_2}^1, \\ 0, & t \notin D_{i_1, i_2}^1; \end{cases} \quad v_{i_1, i_2}^2(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t_2 - t_{2, i_2+1}|}{h_2}, & t \in D_{i_1, i_2}^2, \\ 0, & t \notin D_{i_1, i_2}^2, \end{cases}$$

и финитные вектор-функции типа roofтор [12], свойства которых подробно описаны в [13],

$$v_{i_1, i_2}^{0,1}(t) = (v_{i_1, i_2}^1(t), 0), \quad v_{i_1, i_2}^{0,2}(t) = (0, v_{i_1, i_2}^2(t)).$$

В рассматриваемой задаче дифференциал

$$d\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t_2)\cos(t_1) & R\cos(t_1)\cos(t_2) \\ \sin(t_1)\cos(t_2) & R\sin(t_1)\cos(t_2) \\ \cos(t_2) & -R\sin(t_1) \end{pmatrix} : T_t D \rightarrow T_x \Omega$$

вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ (см. (2)) есть биективное отображение касательных пространств [14].

Базисные вектор-функции $v_{i_1, i_2}^k(x)$ в точках $x = x(t) = x(t_1, t_2)$ неплоского экрана определим по следующей формуле [7, 8]:

$$v_{i_1, i_2}^k(x(t)) = d\mathbf{x} \circ v_{i_1, i_2}^{0,k}(t_1, t_2), \quad x(t) \in \Omega. \quad (4)$$

Графики первый двух компонент вектор-функции $v_{1,1}^1(x(t))$ на экране Ω представлены на рис. 3 для случая, в котором число разбиений в области параметров $n = 2$.

Общее количество базисных функций вида (4) на полусфере для такого разбиения равно

$$N_\Omega = 2n(n-1).$$

Введем трехиндексную нумерацию $j = (j_1, j_2, j_3)$ конечных элементов на параллелепипеде $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, содержащем полушар Q . Конечные элементы представляют собой области

$$Q_{j_1, j_2, j_3} = [x_{1, j_1}; x_{1, j_1+1}] \times [x_{2, j_2}; x_{2, j_2+1}] \times [x_{3, j_3}; x_{3, j_3+1}] \cap Q,$$

положительного объема, где $j_1 = \overline{0, n-1}$, $j_2 = \overline{0, n-1}$, $j_3 = \overline{0, n-1}$, $x_{k, j_k} = a_k + j_k h_k$, $h_k = (b_k - a_k) / n$, $k = 1, 2, 3$.

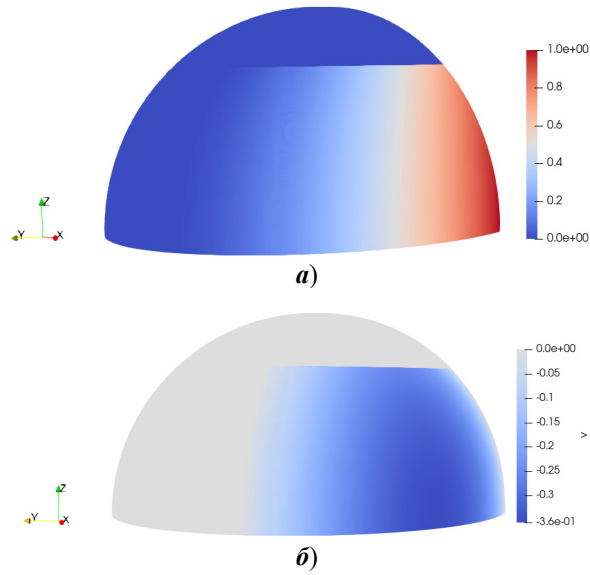


Рис. 3. Первая (а) и вторая (б) компоненты базисной вектор-функции на сферической поверхности

Определим базисные вектор-функции на теле Q с помощью индикаторов

$$\chi_{j_1, j_2, j_3}(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q_{j_1, j_2, j_3}, \\ 0, & x \notin Q_{j_1, j_2, j_3}, \end{cases}$$

по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{j_1, j_2, j_3}^1(x) &= (\chi_{j_1, j_2, j_3}(x), 0, 0); \quad \mathbf{w}_{j_1, j_2, j_3}^2(x) = (0, \chi_{j_1, j_2, j_3}(x), 0); \\ \mathbf{w}_{j_1, j_2, j_3}^3(x) &= (0, 0, \chi_{j_1, j_2, j_3}(x)). \end{aligned}$$

При заданном числе разбиения n общее количество базисных функций в параллелепипеде равно

$$N = 3n^3.$$

Число базисных функций N_Q определяется в начале работы программы.

Общее количество базисных функций равно

$$N = N_\Omega + N_Q \leq 3n^3 + 2n(n-1).$$

Расширенную матрицу системы линейных алгебраических уравнений зададим в блочном виде $\hat{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} | \mathbf{f}]$, для удобства определяя индексацию базисных функций на экране с помощью верхнего индекса, а на теле – нижнего (рис. 4).

Элементы правой части системы уравнений, соответствующие телу, вычисляются по следующим формулам:

$$[f_k]_i = \int_Q \mathbf{E}_0(x) \mathbf{w}_{i_1, i_2, i_3}^k(x) dx = \int_{D_{i_1, i_2, i_3}} \mathbf{E}_0(x) \mathbf{w}_{i_1, i_2, i_3}^k(x) dx, \quad k = 1, 2, 3,$$

а соответствующие экрану – по формулам:

$$[f^k]_i = \int_{\Omega} \mathbf{E}_{0, \tau}(x) \mathbf{v}(x) ds_x, \quad k = 1, 2.$$

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{1,1}^1 & \mathbf{A}_{1,1}^2 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{2,1}^1 & \mathbf{A}_{2,1}^2 \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{3,1}^1 & \mathbf{A}_{3,1}^2 \\ \hline \mathbf{A}_{,1}^1 & \mathbf{A}_{,2}^1 & \mathbf{A}_{,3}^1 & \mathbf{A}^{11} & \mathbf{A}^{12} \\ \mathbf{A}_{,1}^2 & \mathbf{A}_{,2}^2 & \mathbf{A}_{,3}^2 & \mathbf{A}^{21} & \mathbf{A}^{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_Q & \mathbf{A}_{Q, \Omega} \\ \hline \mathbf{A}_{\Omega, Q} & \mathbf{A}_{\Omega} \end{array} \right), \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \hline f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}.$$

Рис. 4. Блочный вид матрицы $\mathbf{A}$

Элементы основной матрицы, соответствующие базисным и тестовым функциям на теле (верхний левый блок), имеют вид

$$\begin{aligned} [A_{kl}]_{ij} &= \int_Q \xi(x) \mathbf{w}_{i_1, i_2, i_3}^k \mathbf{w}_{j_1, j_2, j_3}^l dx - \\ &- \int_Q \left(k_0^2 \int_Q G(x, y) \mathbf{w}_{j_1, j_2, j_3}^l dy + \text{grad div} \int_Q G(x, y) \mathbf{w}_{j_1, j_2, j_3}^l dy \right) \mathbf{w}_{i_1, i_2, i_3}^k(y) dx = \\ &= \int_Q \xi(x) \chi_{i,j}^{k,l} dx - \int_{D_{i_1, i_2, i_3}} \left(k_0^2 \int_{D_{j_1, j_2, j_3}} G(x, y) \mathbf{w}_{j_1, j_2, j_3}^l(y) dy \right) \mathbf{w}_{i_1, i_2, i_3}^k(x) dx - \\ &- \int_{D_{i_1, i_2, i_3}} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \int_{D_{j_1, j_2, j_3}} \frac{\partial}{\partial x_l} G(x, y) \chi_{j_1, j_2, j_3}(y) dy \right) \chi_{i_1, i_2, i_3}(x) dx, \quad k, l = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Элементы матрицы, соответствующие базисным и тестовым функциям на экране, вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} [A^{kl}]_{ij} &= - \int_{\Omega} \left(k_0^2 \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{v}_{j_1, j_2}^l(y) ds_y + \right. \\ &\left. + \text{grad div} \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{v}_{j_1, j_2}^l(y) dy \right) \mathbf{v}_{i_1, i_2}^k(x) ds_x, \quad k, l = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Блоки $\mathbf{A}_{Q,\Omega}$, $\mathbf{A}_{\Omega,Q}$ расположены вне главной диагонали матрицы и отвечают за взаимодействие полей на теле и экране. Для вычисления элементов матрицы в данных блоках используем следующие выражения:

$$[A_l^k]_{ij} = \int_Q \left(k_0^2 \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{v}_{j_1, j_2}^l(y) dy + \right. \\ \left. + \text{grad div} \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{v}_{j_1, j_2}^l(y) ds_y \right) \cdot \mathbf{w}_{i_1, i_2, i_3}^k(x) dx, \quad k = 1, 2, 3, \quad l = 1, 2; \quad (6)$$

$$[A_k^l]_{ij} = - \int_{\Omega} \left(k_0^2 \int_Q G(x, y) \mathbf{w}_{j_1, j_2, j_3}^l(y) dy + \right. \\ \left. + \text{grad div} \int_Q G(x, y) \mathbf{w}_{j_1, j_2, j_3}^l(y) dy \right) \cdot \mathbf{v}_{i_1, i_2}^k(x) ds_x, \quad k = 1, 2, \quad l = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Более детального объяснения требуют формулы, содержащие интегралы по криволинейному экрану. Так, из определения базисных функций по формуле (4) и выражения для интеграла по поверхности через повторный интеграл по области параметров получим

$$[f^k]_i = \int_{D_{i_1, i_2}^k} \mathbf{E}_{0, \tau}(x(t)) \mathbf{v}_{i_1, i_2}^k(x(t)) \sqrt{g(t)} dt,$$

где $g(t) = \det g_{ij}(t) = g_{11}(t)g_{22}(t) - g_{12}^2(t)$.

Метрический тензор g_{ij} может быть вычислен аналитически:

$$g_{ij}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \sin^2(t_2) \end{pmatrix}.$$

Операцию div в (5) внесем под знак интеграла [15], а grad перебросим на тестовую функцию $\mathbf{v}_{i_1, i_2}^k(x)$, учитывая, что ее нормальная составляющая равна нулю на границе области интегрирования. Тогда формула (5) примет следующий вид:

$$[A^{kl}]_{ij} = -k_0^2 \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{v}_{j_1, j_2}^l(y) \mathbf{v}_{i_1, i_2}^k(x) ds_y ds_x + \\ + \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(x, y) \text{div} \mathbf{v}_{j_1, j_2}^l(y) \text{div} \mathbf{v}_{i_1, i_2}^k(x) ds_y ds_x =$$

$$= \int_{D_{i_1 i_2}^k} \int_{D_{j_1, j_2}^l} G(x(t), y(s)) \sqrt{g(t)} \sqrt{g(s)} \left(-k_0^2 \mathbf{v}_{j_1, j_2}^l(y(s)) \cdot \mathbf{v}_{i_1, i_2}^k(x(t)) + \right. \\ \left. + g^{ij}(s) \partial_{s_i} \mathbf{v}_{j_1, j_2}^l(y(s)) \partial_{s_j} \mathbf{x}(s) - g^{ij}(t) \partial_{t_i} \mathbf{v}_{i_1, i_2}^k(x(t)) \partial_{t_j} \mathbf{x}(t) \right) dt ds.$$

В формулах для вычисления элементов матрицы на экране (6) и (7) интегралы преобразуются аналогично.

4. Результаты вычислительных экспериментов

Исследуем сначала внутреннюю сходимость описанного численного метода в задаче дифракции на полушаре.

Получены приближенные решения ИДУ (3) на полушаре Q при числе разбиений $n = 10, 14, 20$ соответственно. Интенсивность распределения электромагнитного поля показана на рис. 5 в центральном сечении полушара. Из полученных экспериментальных результатов видно, что уточняется качественный вид решения; стабилизируется и максимальное значение модуля поля, что позволяет сделать вывод о наличии внутренней сходимости проекционного метода.

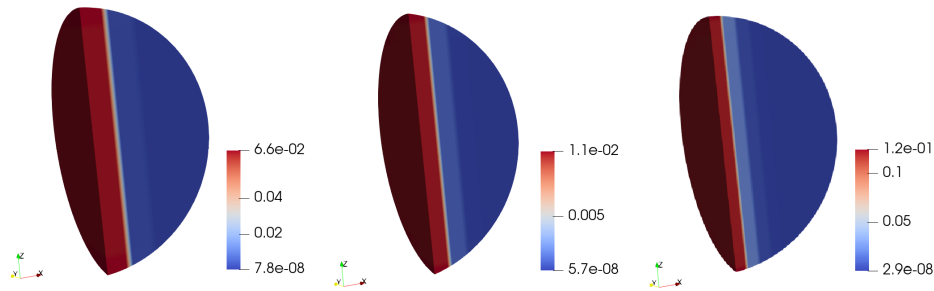


Рис. 5. Внутренняя сходимость метода Галеркина

Перейдем к рассмотрению основного вычислительного эксперимента.

Радиус половины шара положим равным $R = \frac{\lambda}{2}$; длина волны $\lambda = \frac{2\pi}{\text{Re}(k_0)}$.

Волновое число $k_0 = \frac{2\pi\nu}{c} + i$, $\nu = 1$ ГГц, c – скорость света в вакууме (м/с), относительная диэлектрическая проницаемость тела задается формулой

$$\epsilon_r(x) = \begin{cases} 10^{10}, & x \in Q_l, \\ 4, & x \in Q \setminus Q_l, \end{cases}$$

где Q_l – шаровой слой.

На рис. 6 приведен график приближенного решения задачи дифракции в случае отсутствия экрана и диэлектрического слоя.

В этом случае электрическое поле, проходящее через тело, фокусируется у полюса шара.

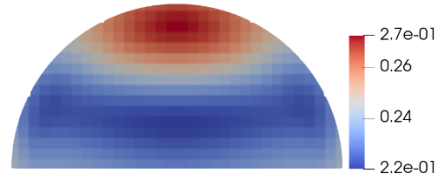


Рис. 6. Модуль $|\mathbf{J}|$ тока поляризации в однородном полушаре

На рис. 7 приведены результаты исследования фокусировки электрического поля внутри тела Q для различных случаев (на графиках не показаны слой диэлектрика и экран). Толщина слоя составляет 10 % радиуса полушара.

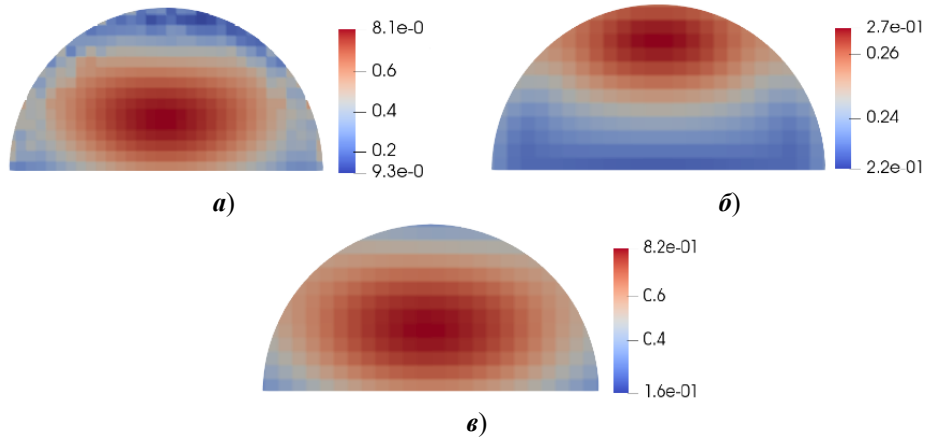


Рис. 7. Различные варианты фокусировки электрического поля

Приведенные на рис. 6, 7 данные свидетельствуют о существенных отличиях в фокусировке поля в сравнении с первым экспериментом (см. рис. 6). Так, при экранировании полушара идеально проводящей полусферой (рис. 7,а) максимальное значение тока поляризации $\mathbf{J}$ (и, что эквивалентно, поля $\mathbf{E}$) сместилось от «северного» полюса полушара к его середине, при этом в несколько раз увеличилось максимальное значение модуля поля.

Рисунок 7,б показывает, что наличие слоя диэлектрика с высоким коэффициентом преломления не так сильно влияет на фокусировку тока поляризации внутри тела: точка максимальной интенсивности поля немного сместилась вниз; при этом само максимальное значение изменилось менее чем на 1 %.

Рисунок 7,в иллюстрирует наилучшую фокусировку вблизи центра области неоднородности. В сравнении с рис. 7,а видим более равномерную картину распределения тока поляризации. В сравнении с данными на рис. 7,б видим увеличение максимального значения величины $|\mathbf{E}|$, а также смещение точки максимума к середине тела.

Далее рассмотрим зависимость решения задачи дифракции от значения толщины слоя диэлектрика при наличии экранирования полусферой.

На рис. 8,а приведен график модуля решения задачи с отсутствующим слоем, на рис. 8,б – при толщине слоя $0,05R$, на рис. 8,в – при толщине слоя $0,1R$.

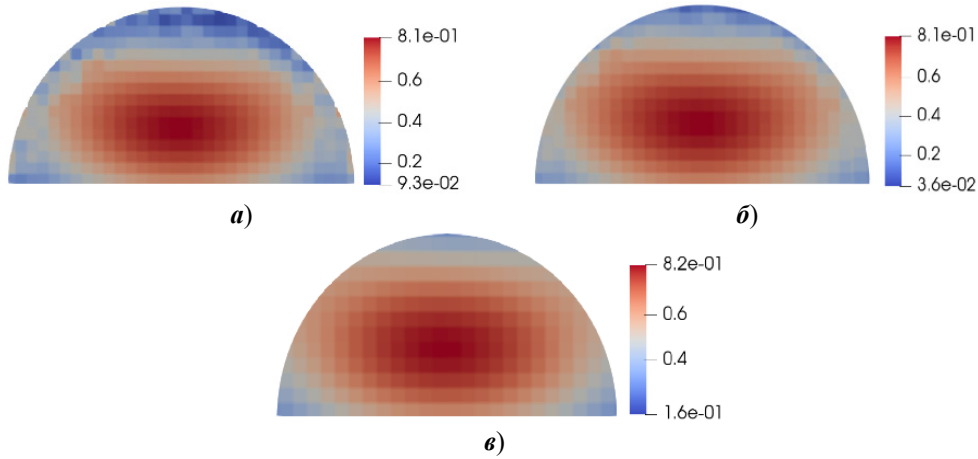


Рис. 8. Зависимость полученного решения от изменения ширины слоя диэлектрика

Видим, что при увеличении толщины происходит слабое, равномерное увеличение значения тока проводимости, что показывает зависимость решения от толщины слоя диэлектрика.

Теперь рассмотрим зависимость фокусировки от значения диэлектрической проницаемости шарового слоя (рис. 9) при $\varepsilon(x) = 20, 100$. Из полученных результатов следует, что влияние (и качественное, и количественное) толщины слоя на решение задачи несущественно.

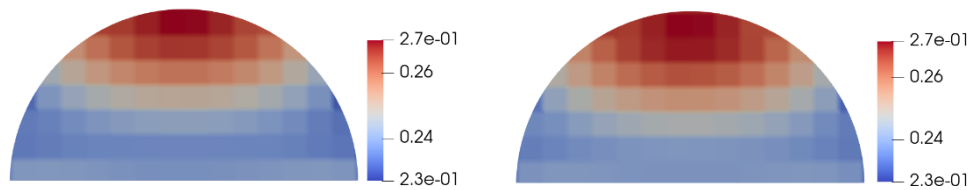


Рис. 9. Зависимость полученного решения от изменения проницаемости слоя

Рассмотрен случай полушара с неоднородным слоем, относительная диэлектрическая проницаемость которого задается формулой

$$\varepsilon_r(x) = \begin{cases} 10^{10}, & x \in Q_l, x_2 \leq 0, \\ 10^2, & x \in Q_l, x_2 > 0, \\ 4, & x \in Q \setminus Q_l. \end{cases}$$

Из данных на рис. 10 видно, что неоднородность шарового слоя приносит едва заметную асимметрию в решение задачи и практически не влияет на фокусировку поля внутри тела.

Заключение

В работе описаны различные способы фокусировки тока поляризации внутри диэлектрического тела. Проведен сравнительный анализ этих способов.

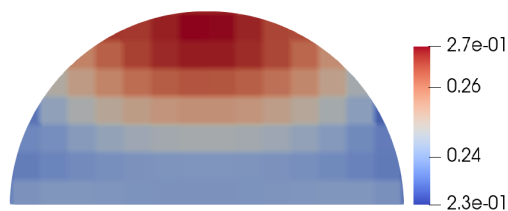


Рис. 10. Зависимость полученного решения от неоднородности диэлектрического слоя

В частности, исследована зависимость решения задачи дифракции (интенсивности электрического поля) от наличия идеально проводящего экрана и диэлектрического шарового слоя, толщины шарового слоя и значения диэлектрической проницаемости слоя. Выбран наиболее эффективный способ фокусировки электрического поля внутри тела.

Список литературы

1. Hashimoto M., Ishizawa H., Hosseini S. H. R., Katsuki S., Akiyama H. Focusing system of Burst Electromagnetic waves for medical applications // 2011 IEEE Pulsed Power Conference. Chicago, IL, USA, 2011. P. 1182–1185.
2. Joshi R. P., Schoenbach K. H. Electroporation Dynamics in Biological Cells Subjected to Ultrafast Electrical Pulse: A Numerical Simulation Study // The American Physical Society. 2000. Vol. 62, № 1. P. 1025–1033.
3. Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. О фредгольмовости уравнения электрического поля в векторной задаче дифракции на объёмном частично экранированном теле // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 9. С. 1242–1251.
4. Smirnov Y. G., Tsupak A. A. Existence and uniqueness theorems in electromagnetic diffraction on systems of lossless dielectrics and perfectly conducting screens // Applicable Analysis. 2017. Vol. 96, № 8. P. 1326–1341.
5. Smirnov Y. G., Tsupak A. A. Investigation of electromagnetic wave diffraction from an inhomogeneous partially shielded solid // Applicable Analysis. 2018. Vol. 97, № 11. P. 1881–1895.
6. Смирнов Ю. Г., Медведик М. Ю., Цупак А. А., Максимова М. А. Численное решение задачи дифракции электромагнитных волн на системе тел и экранов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2014. № 3. С. 114–134.
7. Skvortsov O. S., Tsupak A. A. Numerical Investigation of Electromagnetic Wave Scattering from an Inhomogeneous Solid and a Curvilinear Perfectly Conducting Screen // Technical Physics. 2023. Vol. 68, № 8. P. 187–198.
8. Tsupak A. A. Electromagnetic Wave Scattering from Curvilinear Screens: Galerkin Method Convergence Proof // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, № 9. P. 4091–4100.
9. Цупак А. А. Численный метод и параллельный алгоритм решения задачи дифракции электромагнитной волны на неплоском идеально проводящем экране // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 4. С. 32–41.
10. Самохин А. Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М., 1998. 160 с.
11. Kress R. Linear integral equations. Berlin : Springer-Verlag, 1989.
12. Hänninen M., Sarvas J. Singularity subtraction integral formulae for surface integral equations with RWG, rooftop and hybrid basis functions // Prog. Electromagn. Res. PIER. 2006. Vol. 63. P. 243–278.

13. Медведик М. Ю. Применение функций крышек для решения задачи дифракции электромагнитных волн на экранах сложной формы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2012. № 3. С. 84–98.
14. Зорич В. А. Математический анализ : в 2 ч. М. : ФАЗИС, 1997. Ч. 2. XIV + 554 с.
15. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М. : ИПРЖ «Радиотехника», 1998. 176 с.

References

1. Hashimoto M., Ishizawa H., Hosseini S.H.R., Katsuki S., Akiyama H. Focusing system of Burst Electromagnetic waves for medical applications. *2011 IEEE Pulsed Power Conference*. Chicago, IL, USA, 2011:1182–1185.
2. Joshi R.P., Schoenbach K.H. Electroporation Dynamics in Biological Cells Subjected to Ultrafast Electrical Pulse: A Numerical Simulation Study. *The American Physical Society*. 2000;62(1):1025–1033.
3. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. On the Fredholm property of the electric field equation in the vector problem of diffraction by an oblong partially screened body. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2016;52(9):1242–1251. (In Russ.)
4. Smirnov Y.G., Tsupak A.A. Existence and uniqueness theorems in electromagnetic diffraction on systems of lossless dielectrics and perfectly conducting screens. *Applicable Analysis*. 2017;96(8):1326–1341.
5. Smirnov Y.G., Tsupak A.A. Investigation of electromagnetic wave diffraction from an inhomogeneous partially shielded solid. *Applicable Analysis*. 2018;97(11):1881–1895.
6. Smirnov Yu.G., Medvedik M.Yu., Tsupak A.A., Maksimova M.A. Numerical solution of the problem of diffraction of electromagnetic waves on a system of bodies and screens. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2014;(3):114–134. (In Russ.)
7. Skvortsov O.S., Tsupak A.A. Numerical Investigation of Electromagnetic Wave Scattering from an Inhomogeneous Solid and a Curvilinear Perfectly Conducting Screen. *Technical Physics*. 2023;68(8):187–198.
8. Tsupak A.A. Electromagnetic Wave Scattering from Curvilinear Screens: Galerkin Method Convergence Proof. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(9):4091–4100.
9. Tsupak A.A. Numerical method and parallel algorithm for solving the problem of electromagnetic wave diffraction on a non-flat ideally conducting screen. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2020;(4):32–41. (In Russ.)
10. Samokhin A.B. *Integral'nye uravneniya i iteratsionnye metody v elektromagnitnom rasseyanii = Integral equations and iterative methods in electromagnetic scattering*. Moscow, 1998:160. (In Russ.)
11. Kress R. *Linear integral equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
12. Hänninen M., Sarvas J. Singularity subtraction integral formulae for surface integral equations with RWG, rooftop and hybrid basis functions. *Prog. Electromagn. Res. PIER*. 2006;63:243–278.
13. Medvedik M.Yu. Application of lid functions to solve the problem of electromagnetic wave diffraction on complex-shaped screens. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2012;(3):84–98. (In Russ.)
14. Zorich V.A. *Matematicheskii analiz: v 2 ch. = Mathematical analysis: in 2 parts*. Moscow: FAZIS, 1997;Pt.2:554. (In Russ.)

15. Il'inskiy A.S., Smirnov Yu.G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh* = *Diffraction of electromagnetic waves on conducting thin screens*. Moscow: IPRZh «Radiotekhnika», 1998:176.

Информация об авторах / Information about the authors

Олег Сергеевич Скворцов
студент, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: ghj.ghh.13@mail.ru

Oleg S. Skvortsov
Student, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Алексей Александрович Цупак
кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: altsupak@yandex.ru

Aleksey A. Tsupak
Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 02.07.2024

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 14.08.2024

Принята к публикации / Accepted 05.09.2024